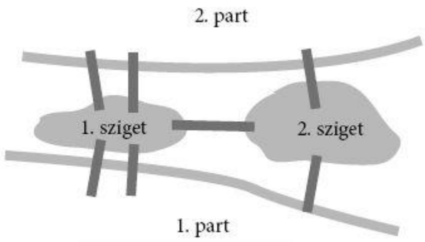
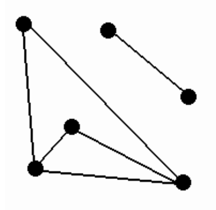
Kombinatorika előadás jegyzet – 2014. március 31.
Összefüggőség, utak
Előadó: Hajnal Péter
A jegyzetet készítette: Torma Gábor (TOGVAAT.SZE)

<u>Emlékeztető:</u>



A gráfelmélet előzményének tekinthető a königsbergi hidak problémája. A felmerülő kérdés az volt, hogy vajon végig lehet-e menni az összes hídon úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladjanak át. Euler bizonyította be, hogy ez nem lehetséges.



A gráf definíciója szerint egy G egyszerű gráfot egy V véges csúcshalmaz, E véges élhalmaz határoz meg.
$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{x, y\} \subseteq V: x \neq y\}$, azaz az élek bizonyos csúcspárok. Nem egyszerű gráf esetén az E élhalmaz elemeinek 2 végpontját egy I illeszkedési reláció írja le.

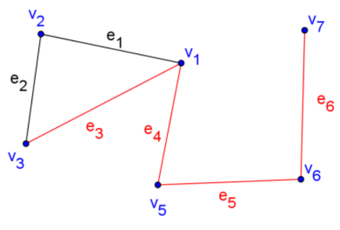
<u>Séta, sétálás, út:</u>

– Definíció: Séta a G gráfban egy olyan $v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3 \dots e_k\, v_k$ sorozat, amelyre igazak a következőek:
  1) $v_0\, v_1\, v_2 \dots v_k \in V$
  2) $e_1\, e_2\, e_3 \dots e_k \in E$
  3) Mindegyik e_i végpontja v_{i-1} és v_i (i = 1, 2, ... , k)

  Ekkor *k* az S séta hossza (k = 0 is lehetséges, tehát létezik 0 lépéses séta is).
  Nyelvezet: S uw séta egy u-ból induló, w-be vezető sétát jelöl, ha a fenti jelöléssel $v_0 = u$ és $v_k = w$.

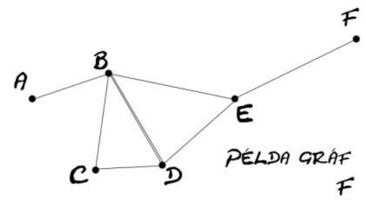
– Definíció: Sétálás a G gráfban egy folyamat, amely a t időparamétertől függ (t = 0, 1, 2, …, k). Sétálás során bármely t időpillanatban v_t csúcsban vagyunk, majd kiválasztunk egy v_t-re illeszkedő élt (e_{t+1}) és ezen áthaladunk a másik végpontba (v_{t+1}). Ez a t+1-edik pillanatban történik.

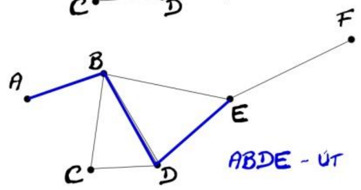
– Definíció: S séta ($v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3 \dots e_k\, v_k$) vonal, ha az e_i élek közt nincs ismétlődés ($i \neq j \rightarrow e_i \neq e_j$).



$v_3\, e_3\, v_1\, e_4\, v_5\, e_5\, v_6\, e_6\, v_7$ vonal

– Definíció: S séta út, ha a v_i csúcsok közt nincs ismétlődés, tehát sem él, sem csúcs nem fordulhat elő egynél többször.





- Észrevétel: S út → S vonal

  Bizonyítás: indirekt módon

  Tegyük fel, hogy S út és él ismétlés történik.

  S: $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ e_3\ \dots\ e_i \dots e_j\ \dots\ e_k v_k$ és $e_i = e_j = e.$

  Ekkor $v_{i-1}\ e_i$ egyik végpontja, tehát $v_{i-1}\ e_j$ mellett is szerepel.

  Ez viszont ellentmondás, hiszen az útban nem fordulhat elő csúcsismétlés.

- Lemma: G-ben ∃ xy séta → ∃ xy út

  Bizonyítás:

  S xy séta: $x = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots, e_k, v_k = y$

  1. Ha nincs csúcsismétlés, akkor S út.
  2. Ha van csúcsismétlés, akkor $x = v_0, e_1, v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, e_k, v_k = y$

     S' séta: $x = v_0, e_1, v_1, \dots, v_i = v_j, e_{kj+1}, v_{j+1}, \dots, e_k, v_k = y$

     1) xy séta
     2) S' hossza < S hossza

     A bizonyítás matematikai befejezése: Vegyük a legrövidebb S: xy sétát. → Csak az 1) eset lehetséges. → Van egy xy út.

- Definíció: Ha x,y ∈ V, akkor x ~ y, tehát x-ből elérhető y, vagyis ∃ xy séta.

- Tétel: Minden gráfban, ha x, y és z csúcsok, akkor:
  1) x ~ x
  2) x ~ y → y ~ x
  3) x ~ y és y ~ z → x ~ z

- Definíció: R reláció egy H halmaz elemei közt. R ekvivalenciareláció, ha:
  1) x R x
  2) x R y → y R x
  3) x R y és y R z → x R z

- Példa: H: egy általános iskola tanulói

  R: „osztálytárs" = ugyanabba az osztályba jár (R ekvivalencia reláció)

- Tétel: „A fenti példa univerzális példa." Tehát „ha R ekvivalencia reláció H-n, akkor H osztályokra bontható úgy, hogy R relációban állni egyenlő azzal, hogy ugyanahhoz az osztályhoz tartozni."

- Következmény: Minden G gráf csúcshalmaza osztály(ok)ba sorolható úgy, hogy ha x,y ∈ V csúcsok egy osztályba esnek, akkor x ~ y, ha x,y ∈ V különböző osztályokba esnek, akkor x ≁ y.

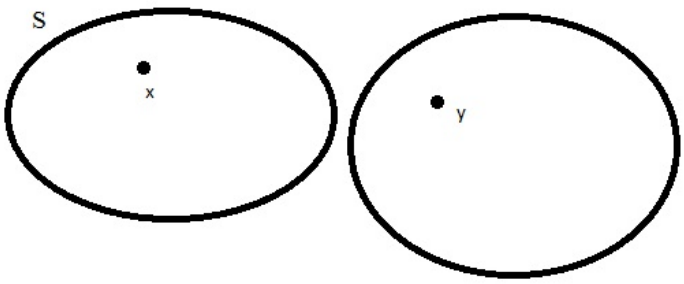
- Definíció: Egy osztály csúcsai és a köztük haladó élek G egy komponensét alkotják.

– Megjegyzés: A komponensekben bármely két csúcs közt elérhetőség van. Különböző komponensek közt nem haladhat él.

Összefüggőség:

– Definíció: G gráf összefüggő, ha tetszőleges csúcsából bármelyikbe el tudunk sétálni: $\forall\, x, y\ \in V\ x \sim y$

– G gráf nem összefüggő ↔ Csúcsai két nem üres osztályba sorolhatók úgy, hogy a két osztály között ne haladjon él.
Bizonyítás:
„←"
Ha x eleme az egyik osztálynak és y eleme a „másik" osztálynak, akkor x $\nsim$ y. Valóban egy *xy* útnak váltania kellene osztályt, de ehhez nincs él.
„→"
Létezik olyan x és y csúcsok, hogy nincs séta x-ből y-ba ($\exists x\ \exists y$: x $\nsim$ y).
Ekkor legyen: S: {z ∈ V: x-ből z-be el tudunk sétálni} és T = V(G) \ S = $\bar{S}$.



Belátjuk, hogy S, T jó két osztályba sorolása csúcsaiknak.
Indirekt módon történő bizonyítás:
Tegyük fel, hogy létezik S-T kereszt él. Legyen s ∈ S és t ∈ T: *s* és *t* összekötött.
Ekkor:

Az ábrán látható egy séta *t*-be (kezdetén az s ∈ S –t bizonyító séta, majd az *st* él jön). A feltételek szerint azonban mivel t ∈ T, ezért nincs x-ből t-be séta. Ez ellentmondás, tehát az eredeti állítás igaz.

A képek forrása:
http://www.ementor.hu/?q=node/163
http://lexikon.fazekas.hu/44
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/hu/0/05/Csx_graf_ut.jpg